

## Körív hosszának meghatározása hosszmérés útján

Az interneten talált [ 1 ] műben azt olvastuk, hogy egy körív hosszának hosszmérések útján történő közelítő meghatározására *Christiaan Huygens* holland tudós képletet állított fel – 1. ábra.

286

IV. B. ПЛАНИМЕТРИЯ

### § 15а. Формула Гюйгенса для длины дуги

На практике часто требуется найти длину дуги, данной на чертеже или в натуре, причем неизвестно, какую часть окружности составляет дуга и каков ее радиус. В таких случаях можно пользоваться следующим приемом:

Отметим на данной дуге  $\widehat{AB}$  (рис. 122а) ее середину  $M$  (она лежит на перпендикуляре  $CM$ , проведенном к хорде

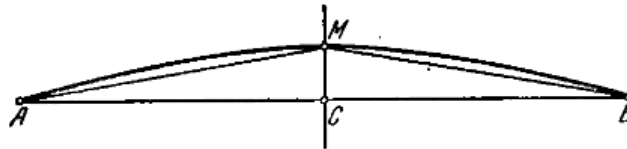


Рис. 122а.

$AB$  через ее середину  $C$ ). Затем измерим хорду  $AB$  и хорду  $AM$ , стягивающую половинную дугу. Длина  $p$  дуги  $\widehat{AB}$  выражается (приблизительно) следующей формулой Гюйгенса<sup>1)</sup>

$$p \approx 2l + \frac{1}{3}(2l - L),$$

где  $l = AM$  и  $L = AB$ .

Относительная погрешность этой формулы составляет около 0,5%, когда  $\widehat{AB}$  содержит  $60^\circ$ . С уменьшением угловой меры дуги процент погрешности резко падает. Так, для дуги в  $45^\circ$  относительная погрешность составляет примерно 0,02%.

1. ábra – forrása: [ 1 ]

A képlet az 1. ábra szerint:

$$\boxed{p \approx 2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot l - L)} \quad , \quad (1)$$

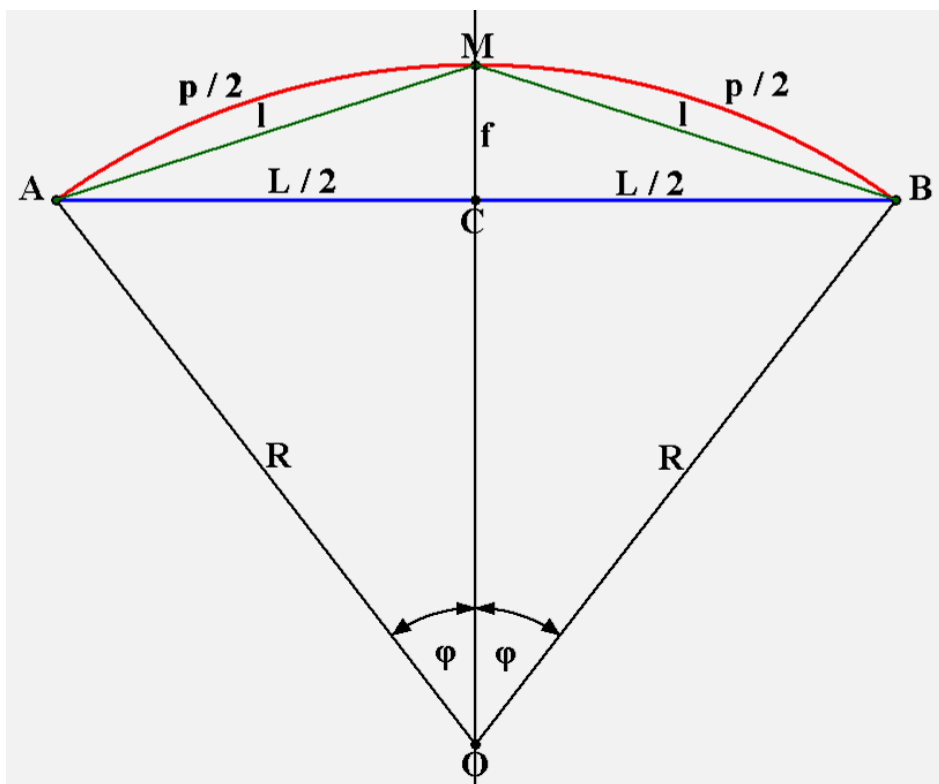
ahol:

~  $p$ : az  $AB$  körív hossza;

~  $l$ : az  $AM$  szakasz hossza;

~  $L$ : az  $AB$  szakasz hossza.

Most ennek járunk utána. Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Itt feltüntettük az alábbiakban előforduló jelöléseket.

A keresett körív pontos értéke:

$$p = 2 \cdot R \cdot \varphi . \quad (2)$$

Az ( 1 ) - ben szereplő egyéb mennyiségek pontos kifejezései:

$$L = 2 \cdot R \cdot \sin \varphi , \quad (3)$$

$$l = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} . \quad (4)$$

Most ( 1 ) szerint a körív hosszának közelítő képlete:

$$p_{köz} = 2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot l - L) ; \quad (5)$$

( 5 ) - öt kifejtjük ( 3 ) és ( 4 ) - gyel:

$$\begin{aligned} p_{köz} &= 2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot l - L) = 2 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot L = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot l - \frac{1}{3} \cdot L = \\ &= \frac{1}{3} \cdot [4 \cdot (2 \cdot l) - L] = \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right) - 2 \cdot R \cdot \sin \varphi\right] = \\ &= \frac{2 \cdot R}{3} \cdot \left(8 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \varphi\right) = \frac{2 \cdot R}{3} \cdot \left(8 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \frac{2 \cdot R}{3} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(4 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$p_{köz} = \frac{2 \cdot R}{3} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(4 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) . \quad (6)$$

A pontos és a közelítő ívhosszak százalékos eltérése:

$$\delta = \frac{p - p_{k\ddot{o}z}}{p} \cdot 100 (\%) = 100 \cdot \left(1 - \frac{p_{k\ddot{o}z}}{p}\right) (\%) . \quad (7)$$

Részletezés (7) - hez, (2) és (6) - tal is:

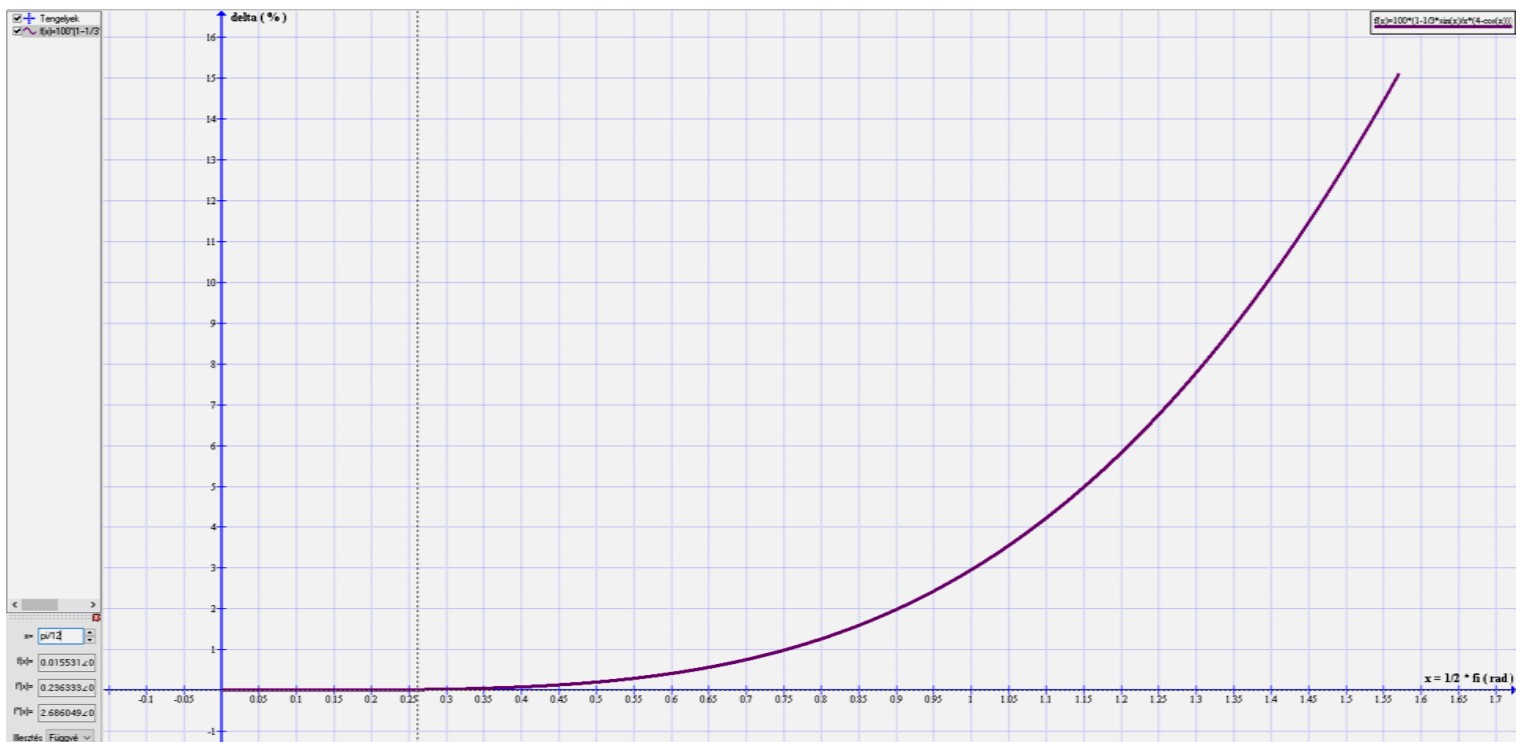
$$\frac{p_{k\ddot{o}z}}{p} = \frac{\frac{2 \cdot R}{3} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(4 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \cdot R \cdot \varphi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(4 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) , \quad (8)$$

így (7) és (8) - cal:

$$\delta = 100 \cdot \left(1 - \frac{p_{k\ddot{o}z}}{p}\right) (\%) = 100 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \cdot \left(4 - \cos \frac{\varphi}{2}\right)\right] (\%) , \quad (9/1)$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi . \quad (9/2)$$

A (9) függvény grafikonját  $\frac{\varphi}{2} = x$  változóval a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Itt mindjárt „kiszámoltuk” a  $2 \cdot \varphi = 60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$  középponti szögű körív esetében előálló százalékos hibát, amikor is  $\varphi/2 = 15^\circ = \pi/12 \text{ rad} \rightarrow \delta_{60^\circ} = 0,015531 \%$  .

Ez nem egyezik az 1. ábrán felhozott példa 0,5 % - os értékével. Igaz, könnyű eltéveszteni - ni. Igaz az is, hogy a körív középponti szögének csökkenésével a hiba is gyorsan csökken.

A pontos és a közelítő képlettel számítható ívhossz - eredmények százalékos eltérését szemléltető 3. ábra szerint **1%** - os eltérésen belül maradunk  $\frac{\varphi}{2} \approx 0,75 \text{ rad} \rightarrow \varphi \approx 1,5 \text{ rad} \approx 86^\circ$  félnyílásszögig; ez így egy meglehetősen jó közelítésnek számít.

### Megjegyzések:

**M1.** Most megnézzük, hogyan alakulnak a pontos képletek abban az esetben, ha csak távolságmérési eredményeink vannak. Ehhez visszatérünk a 2. ábrához.

#### 1. Feladat

Adott:  $L, f$ .

Keresett:  $p$ .

Ekkor először az **OBC** derékszögű háromszögből *Pithagorász* tételével:

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot f + f^2 + \frac{L^2}{4} \rightarrow 2 \cdot R \cdot f = f^2 + \frac{L^2}{4} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8 \cdot f} = \frac{f}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2\right]}} \quad (\text{F1} - 1)$$

Szintén az **OBC** derékszögű háromszögből, szinusz szögfüggvénnyel:

$$\sin \varphi = \frac{L/2}{R} = \frac{L}{2 \cdot R} = \frac{L}{f \cdot \left[1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2\right]} \rightarrow \underline{\underline{\varphi = \arcsin \left( \frac{\frac{L}{f}}{1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2} \right)}} \quad (\text{F1} - 2)$$

Most ( 2 ), ( F1 - 1 ) és ( F1 - 2 ) - vel:

$$\underline{\underline{p(L, f) = f \cdot \left[1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2\right] \cdot \arcsin \left( \frac{\frac{L}{f}}{1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2} \right)}} \quad (\text{F1} - 3)$$

.....

#### 2. Feladat

Adott:  $L, l$ .

Keresett:  $p$ .

Ekkor pl. az **ACM** derékszögű háromszögből *Pithagorász* tételével:

$$l^2 = f^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow f^2 = l^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = l^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2\right] \rightarrow$$

$$\underline{f(l, L) = l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2}}, \quad (\text{F2} - 1)$$

majd ( F1 – 3 ) és ( F2 – 1 ) - gyel:

$$p[(L, f(l, L))] = f \cdot \left[1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2\right] \cdot \arcsin\left(\frac{\frac{L}{f}}{1 + \left(\frac{L}{2 \cdot f}\right)^2}\right), \quad f(l, L) = l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2},$$

( F2 – 2 / 1 )

vagy:

$$p(L, l) = l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2} \cdot \left\{1 + \left[\frac{\frac{L}{2 \cdot l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2}}\right]^2\right\} \cdot \arcsin\left[\frac{\frac{\frac{L}{l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2}}}{1 + \left(\frac{\frac{L}{2 \cdot l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{2 \cdot l}\right)^2}}\right)^2}\right]. \quad (\text{F2} - 2 / 2)$$


---

.....

Azt látjuk, hogy a **L** , **l** adatokkal dolgozó ( F2 ) képletek sem igazán egyszerűek, így a kor igényeinek jobban megfelelő / egyszerűbb ( 1 ) képlet alkalmazása lényegesen megkönnyíthette a munkát Huygens idejében, a 17. században.

**M2.** Az ( 1 ) képlet egyúttal közelítőleg megoldja a körív kiegyenesítésének feladatát is. Javasoljuk, hogy ehhez készítsen magyarázó ábrát az érdeklődő Olvasó!

**M3.** Az ívhossz **p** betűvel való jelölését a forrástól vettük át; **p** mint periméter = kerület.

**Forrás:**

[ 1 ] – **Выгодский М.Я.**: Справочник по элементарной математике. 1975.djvu - [3,814,920 байт](#)

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***  
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2022. 05. 23.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>